بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

www.tafrihicenter.ir/edu کلیک کنید

نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

فصل ۴

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

www.konkur.in

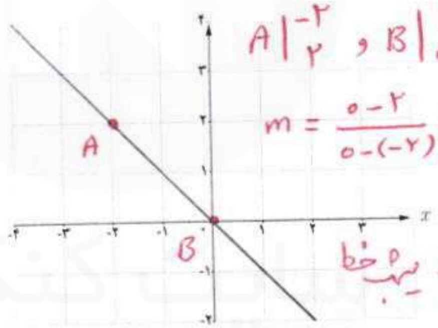
درس ۱

آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

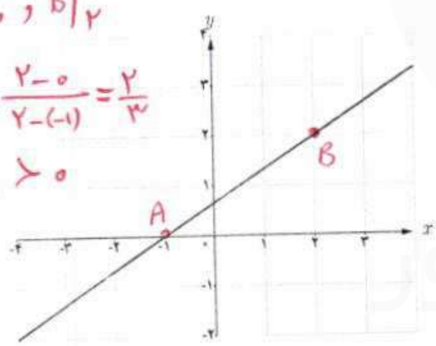
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



$A\Big|^{-2}_{2}$ و $B\Big|^{0}_{0}$

$m = \frac{0-2}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1$

شیب خط < 0



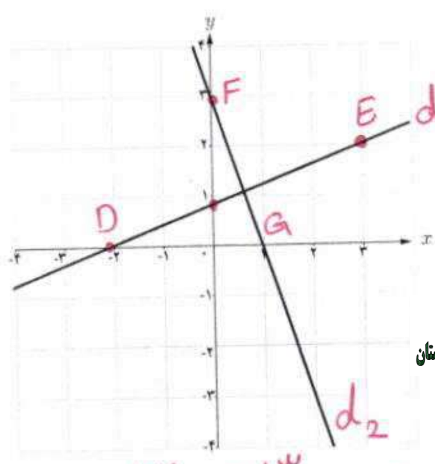
$A\Big|^{-1}_{0}$, $B\Big|^{2}_{2}$

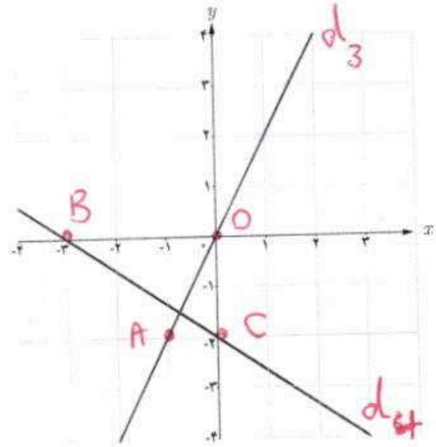
$m = \frac{2-0}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

شیب خط > 0

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$





تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$D\Big|^{-2}_{0}$ ، $E\Big|^{3}_{2} \rightarrow m = \frac{2}{5} = m_{d_1}$

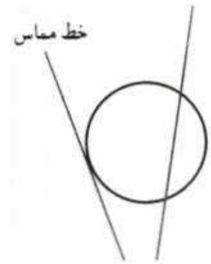
$A\Big|^{-1}_{-2}$ ، $O\Big|^{0}_{0} \rightarrow m = \frac{0-(-2)}{0-(-1)} = 2 = m_{d_3}$

$G\Big|^{1}_{0}$ ، $F\Big|^{0}_{3} \rightarrow m = \frac{3}{\ldots} = m_{d_2}$

www.konkur.in

خط مماس بر یک منحنی

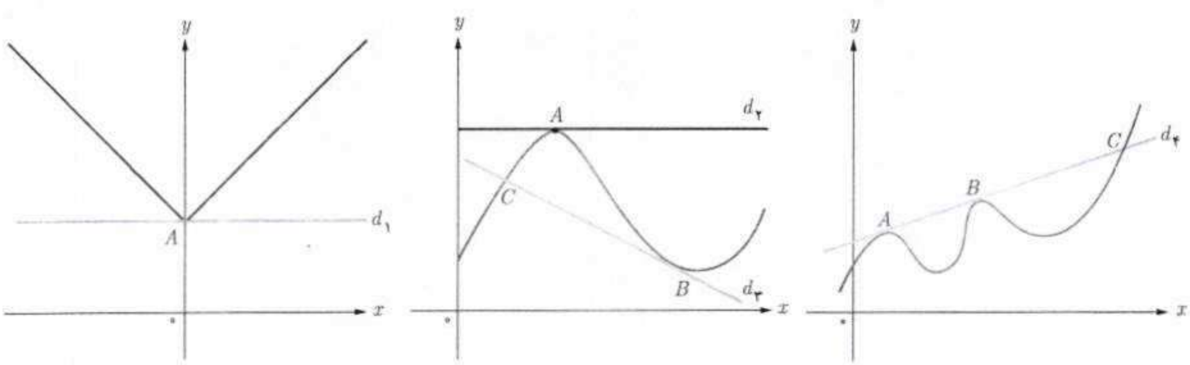
یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.



خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این‌رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایپ نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایپ نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



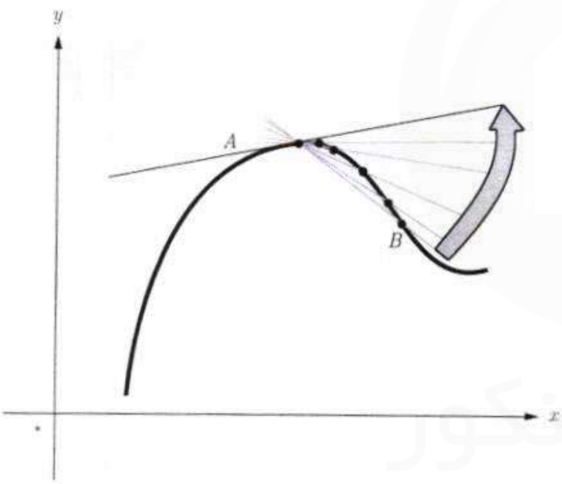
www.konkur.in

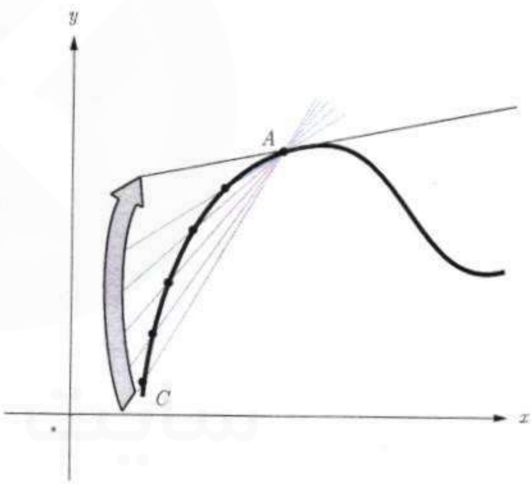
فعالیت

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ خط مماس

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به خط مماس نزدیک می‌شوند. به‌طور شهودی می‌توان گفت :

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.





در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

سایت کنکور konkur.in

فعالیت

الف) تابع $f(x)=-x^2+10x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$ نقاط $A(۲,f(۲))$، $B(۶,f(۶))$، $C(۵,f(۵))$، $D(۴,f(۴))$ و $E(۳,f(۳))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$A\Big|^{۲}_{۱۶}$ ، $B\Big|^{۶}_{۲۴}$ ، $C\Big|^{۵}_{۲۵}$ ، $D\Big|^{۴}_{۲۴}$ ، $E\Big|^{۳}_{۲۱}$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{۲۴-۱۶}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.

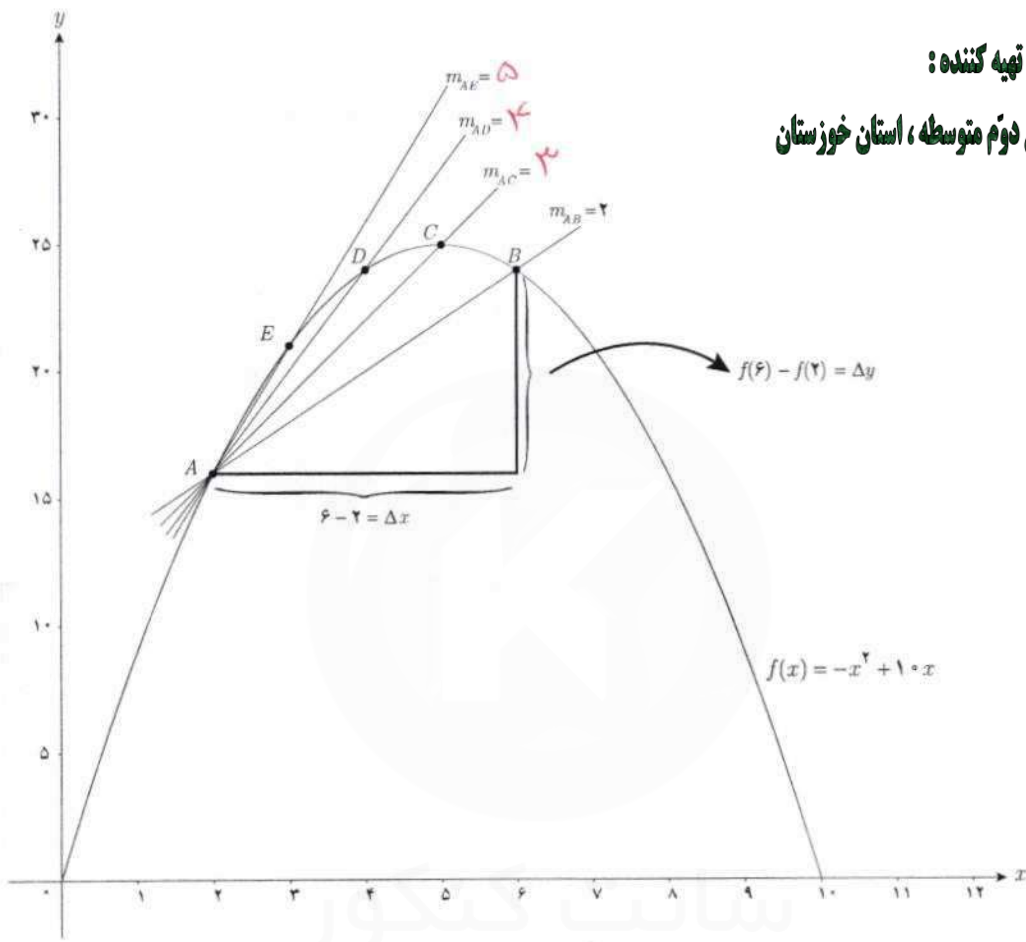
$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۲۵-۱۶}{۵-۲}=۳$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{۲۴-۱۶}{۴-۲}=۴$$

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{۲۱-۱۶}{۳-۲}=۵$$

www.konkur.in

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان



همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم :

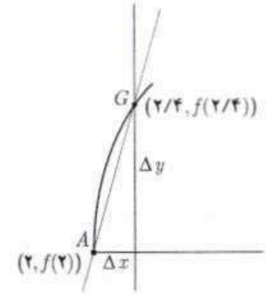
$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

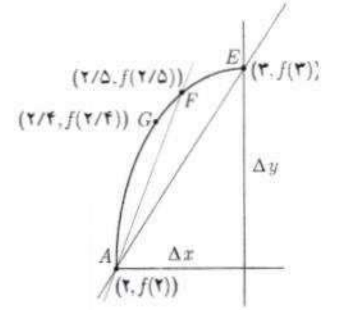
در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

[۲,۶]	۲ ________________ ۶	Δx=۶−۲=۴	Δy=۲۴−۱۶=۸
[۲,۵]	۲ ____________ ۵	Δx=۵−۲=۳	Δy=۲۵−۱۶=۹
[۲,۴]	۲ ________ ۴	Δx=۴−۲=۲	Δy=۲۴−۱۶=۸
[۲,۳]	۲ ____ ۳	Δx=۳−۲=۱	Δy=۲۱−۱۶=۵

www.konkur.in

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^۲+۱۰x$ در فاصله [۲،۳] رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه [۲،۲/۴] رسم شده است.





$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۵-۱۶}{۲,۴-۲}=\frac{۲,۲۵}{۰/۴}=۵,۶۲۵$$

$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد.
[۲،۲/۴]	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۵-۱۶}{۲,۴-۲}=\frac{۲,۲۵}{۰/۴}=۵/۶$
[۲،۲/۳]	$\frac{f(۲,۳)-f(۲)}{۲,۳-۲}=\frac{۱۷,۷۵-۱۶}{۲,۳-۲}=\frac{۱,۷۵}{۰/۳}=۵,۸۳$
[۲،۲/۲]	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲،۲/۱]	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲،۲/۰۱]	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
[۲،۲/۰۰۱] ⋮	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$ ⋮ ⋮
[۲،۲+h] (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\longrightarrow ?$

مقدارهای به دست آمده به ۶ نزدیک می‌شوند.

www.konkur.in

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که : $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$
کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم :

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۲+h)^۲+۱۰(۲+h)-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(h^۲+۴h+۴)+۲۰+۱۰h-۱۶}{h}=$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲-۴h-\cancel{۴}+\cancel{۴}+۱۰h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲+۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(-h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۶)=۶$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۱/۵,۲]، [۱/۶,۲]، [۱/۷,۲]، [۱/۸,۲] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ ، ۶/۳، ۶/۲، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم : $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت : $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

www.konkur.in

$f(3) = -(3)^2 + 10(3) = -9 + 30 = 21$

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2)=6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x)=-x^2+10x$ محاسبه شده است :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+10(3+h)-21}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-9-6h-h^2+30+10h-21}{h}=\cancel{\lim\frac{-h+4h}{}}=\lim(-$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+4)=4$$

❖ **مثال** : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^2+10x$ را در نقطه $A(2,f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

❖ **حل** : با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد : $f'(2)=6=$ شیب خط مماس در نقطه A

$A(2,f(2))=(2,16)$

$y-16=6(x-2)\Rightarrow y=6x+4$

کار در کلاس

$f(-2)=(-2)^2+3=7$

$f(-2+h)=(-2+h)^2+3=4-4h+h^2+3=7-4h+h^2$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در نقطه‌ای به طول -2 بنویسید.

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{7-4h+h^2-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4+h)=-4$$

❖ تذکر : با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

❖ **مثال** : اگر $f(x)=-x^2+10x$، $f'(2)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

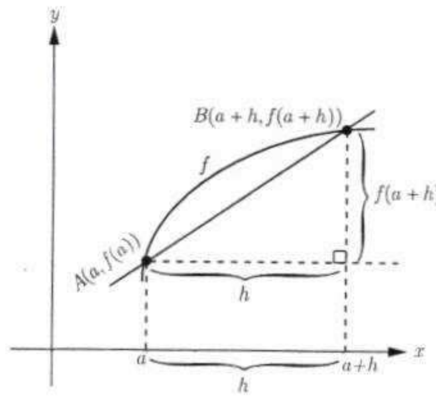
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(2+\Delta x)^2+10(2+\Delta x)-16}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cancel{4}-\Delta x^2-4\Delta x+\cancel{20}+10\Delta x-\cancel{16}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x^2+6\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-\Delta x+6)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+6)=6$$

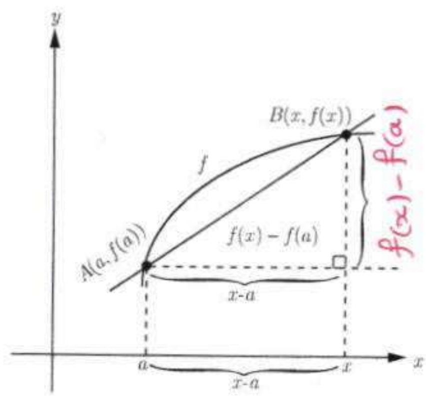
محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ به‌صورت : $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

www.konkur.in



(الف)



(ب)

با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

مثال : اگر $f(x)=x^۲$ ، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :
$$f'(۳) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(h+۳)^۲-۹}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{h(h+۶)}{h} = \lim_{h \to ۰}(h+۶) = ۶$$

روش دوم :
$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x \to ۳}(x+۳) = ۶$$

www.konkur.in

$f(8)=-(8)^2+10(8)=16 \quad f'(8)=\lim\limits_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\frac{-(x-2)(x-8)}{x-8}=-6$

$f(5)=-(5)^2+10(5)=25 \quad f'(5)=\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=0$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(راهنمایی: تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید. توجه کنید وقتی که $h\to 0$ آنگاه $x\to a$)

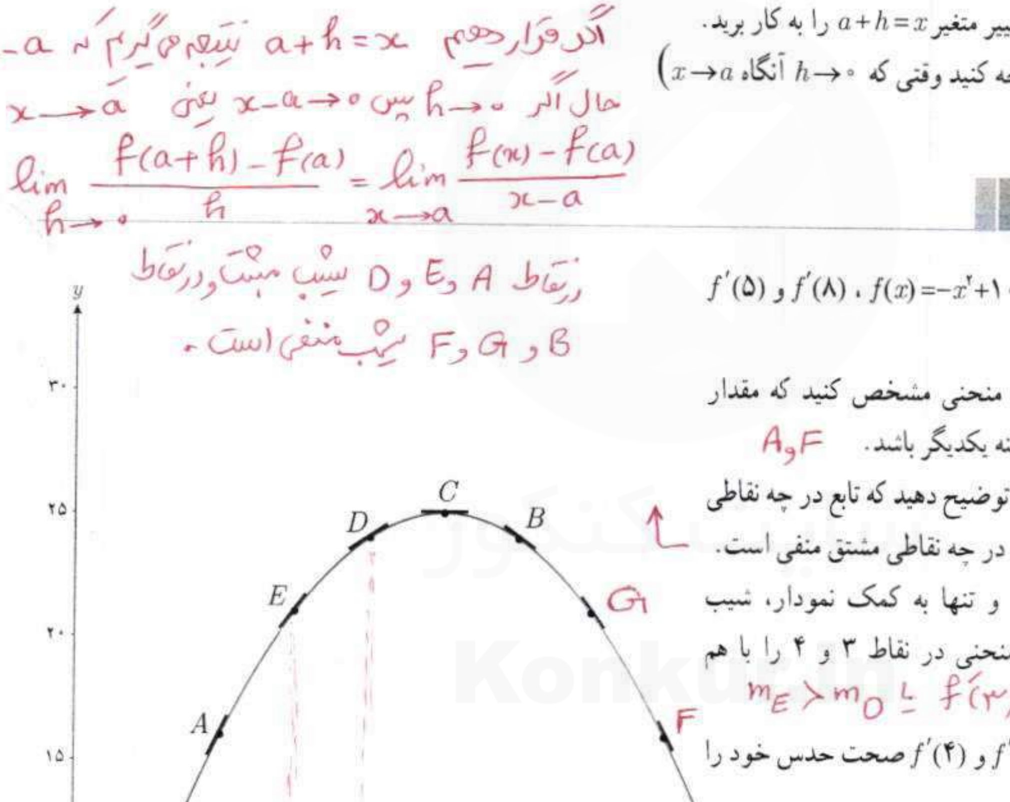
اگر قرار دهیم $a+h=x$ نتیجه می‌گیریم که $h=x-a$

حال اگر $h\to 0$ پس $x-a\to 0$ یعنی $x\to a$ لذا

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

کار در کلاس

در نقاط A و E و D شیب مثبت و در نقاط B و G و F شیب منفی است.



الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. A و F

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

بالا

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. $m_E > m_D$ یا $f'(3)>f'(4)$

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\dots=4$

$f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\dots=2$

لذا $f'(3)>f'(4)$

www.konkur.in

$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}$

$=\lim(3x+4)=10$

$y-9=10(x-2)$

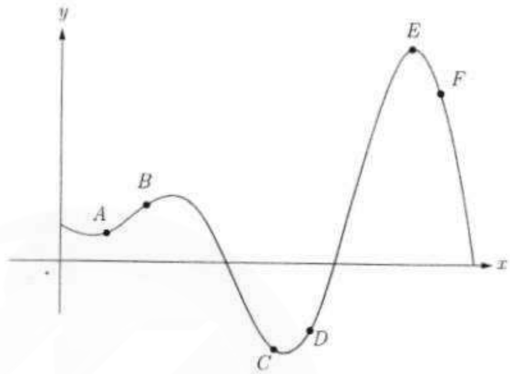
$y-9=10x-20 \longrightarrow y=10x-11$

معادله خط مماس

تمرین

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



شیب	نقطه
۳-	E
۱-	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C m_3

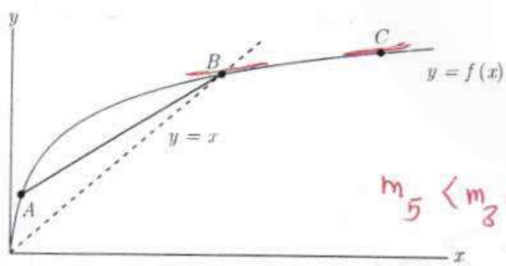
ت) شیب خط AB m_4

ث) شیب خط $y=2$ $m_5=0$

ج) شیب خط $y=x$ $m_6=1$

$m_5<m_3<m_2<m_4<m_6<m_1$

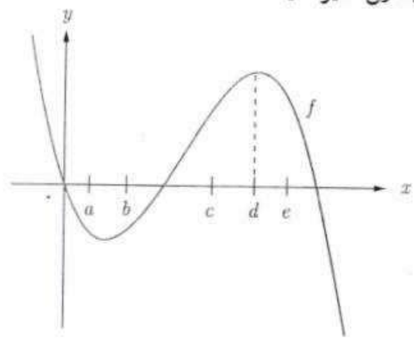
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



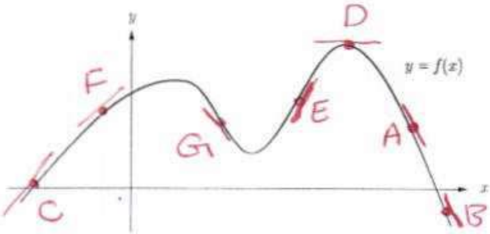
x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	۰/۵-
e	۲-

www.konkur.in

۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.



پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x)=0$ و $f'(x)>0$

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x)=0$

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1)=f'(x_2)$

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است. $f(x)>0$ و $f'(x)<0$

۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$f(-1)=-3$

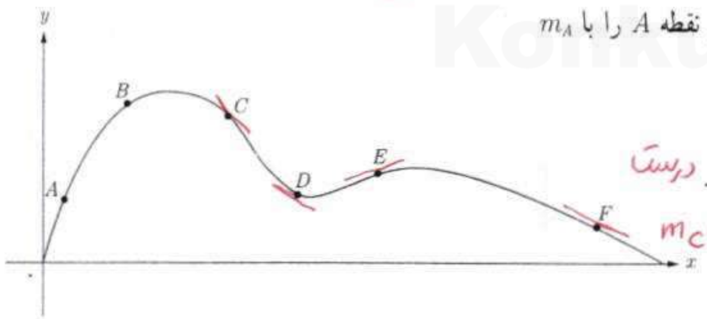
$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست ← مثلاً در نقطه F شیب منفی است.

ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست



پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ نادرست $m_C<m_D<m_F$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

www.konkur.in

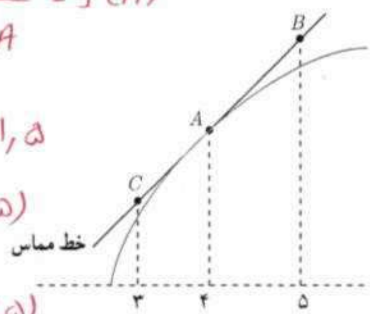
۸ برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.

$$\text{شیب} = \frac{f(B)-f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C)-f(A)}{x_C - x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B)-۲۵}{۱} = \frac{f(C)-۲۵}{-۱} = ۱/۵$$

$f(B)=۲۶/۵ \rightarrow B(۵, ۲۶/۵)$

$f(C)=۲۳/۵ \rightarrow C(۳, ۲۳/۵)$



۹ در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $j-s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

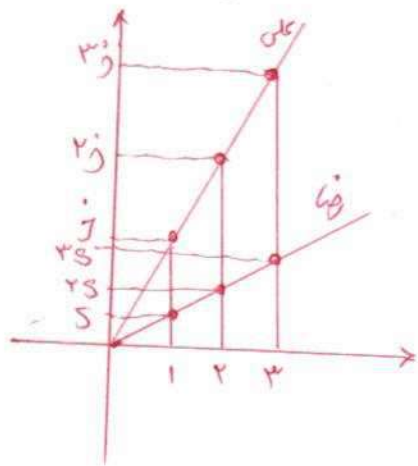
پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ثانیه	۱	۲	۳	n
علی	j	$۲j$	$۳j$	nj
رضا	s	$۲s$	$۳s$	ns

لذا نسبت $\frac{j}{s}$ ثابت است. پس می‌توان گفت که علی $\frac{j}{s}$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



www.konkur.in

درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

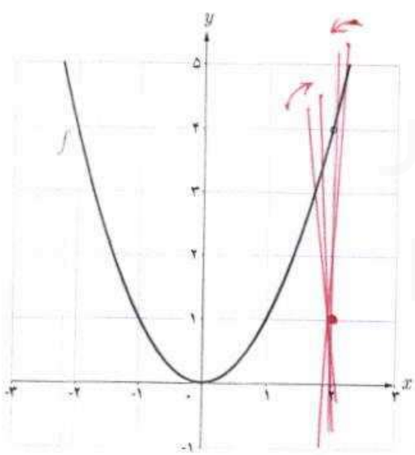
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق‌پذیر است.
در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.
در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه ی $x=2$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصر بفردی میل نمی‌کند.

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به‌کار گیریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}=$$

www.konkur.in

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \to 2$، داریم :

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

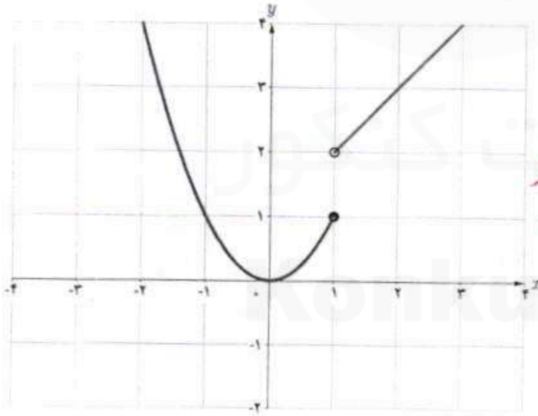
بنابراین $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.
بله

کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ زیرا شیب خط‌های قاطعی که از نقطه‌ی $x=1$ می‌گذرند، به عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کند. همچنین



$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد.

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

www.konkur.in

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=\circ.f'(a)=\circ$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\circ$ و از آنجا $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

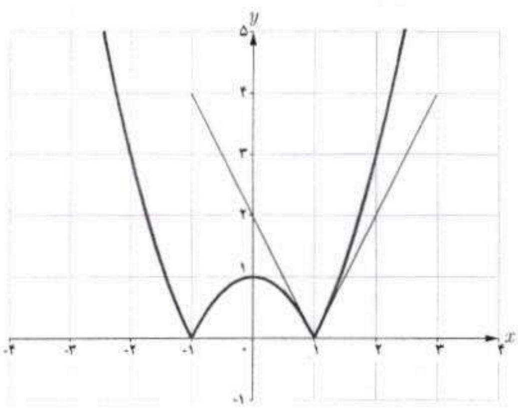
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|-\circ}{x-۱}$$

برای محاسبه $f'(۱)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}=-۲$$



بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=۱$ می‌نامیم و با $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ نمایش می‌دهیم.

www.konkur.in

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت :

شیب نیم‌مماس چپ = $f'_-(1)$

شیب نیم مماس راست = $f'_+(1)$

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از :

نیم مماس راست $\quad y-0=2(x-1)$ یا $y=2x-2 \ ، \ x\geq 1$

نیم مماس چپ $\quad y-0=-2(x-1)$ یا $y=-2x+2 \ ، \ x\leq 1$

می‌باشند.

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

پاسخ صفحه

> **تعریف :** مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :
>
> $$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
>
> یا به‌طور معادل :
>
> $$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ ,\ f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-1|-f(-1)}{x+1}\ \begin{cases}①\\②\end{cases}$$

$$① \lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x^2+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}-(x-1)=2 \Rightarrow f'_+(-1)=2$$

معادله نیم مماس راست

$$\to y-0=2(x+1)\to y=2x+2 \quad x>-1$$

$$② \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2 \Rightarrow f'_-(-1)=-2$$

معادله نیم مماس چپ

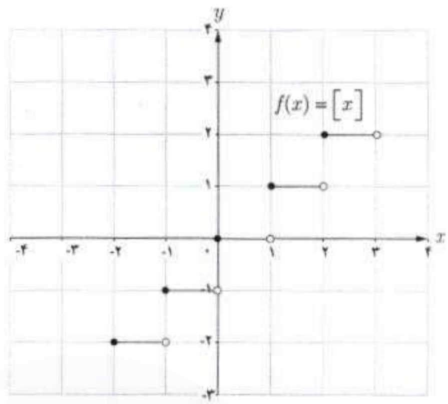
$$\to y-0=-2(x+1)\to y=-2x-2$$

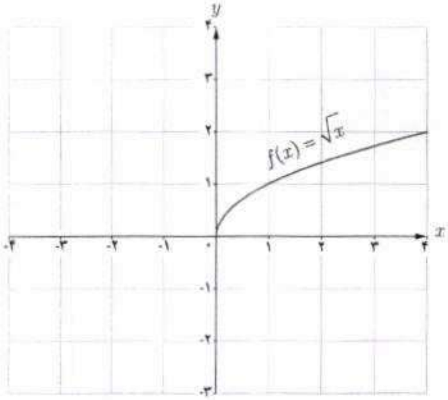
www.konkur.in

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

✤ **مثال :** توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.

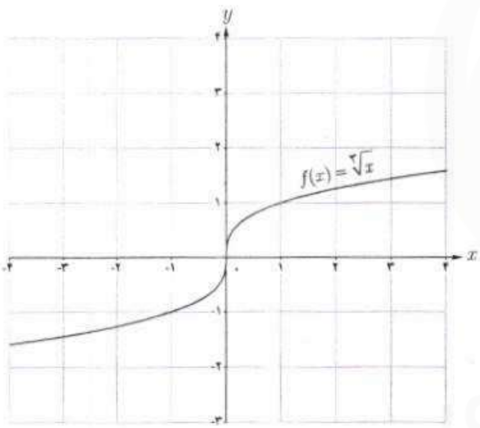




اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

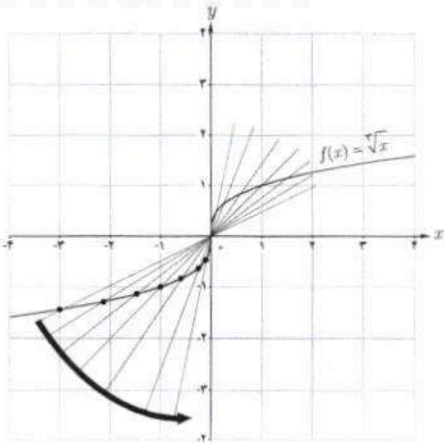
✤ **مثال :** تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

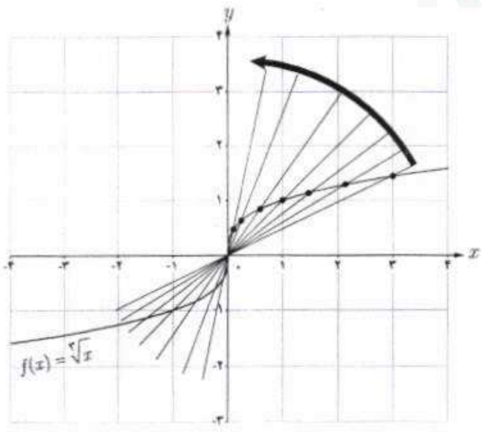
$$'(\;)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\quad 0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$



بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.





www.konkur.in

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1].

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

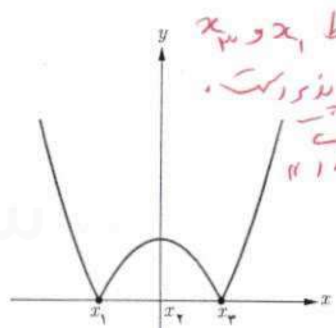
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

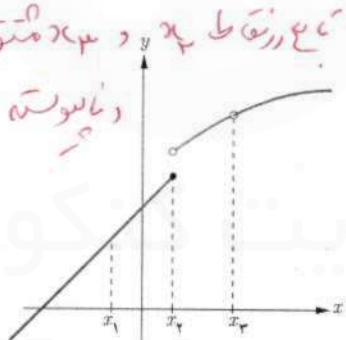
کار در کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

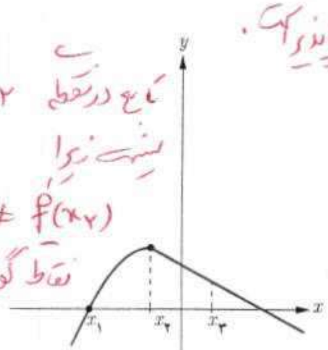
تابع در نقاط x_1 و x_3 مشتق ناپذیر است. «نقاط گوشه‌ای»



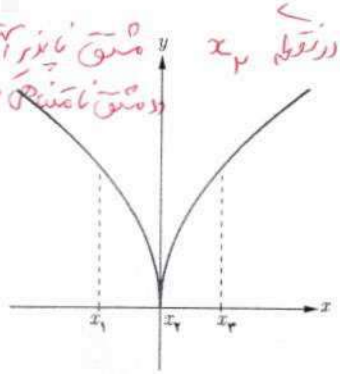
تابع در نقاط x_2 و x_3 مشتق ناپذیر است. (ناپیوسته)



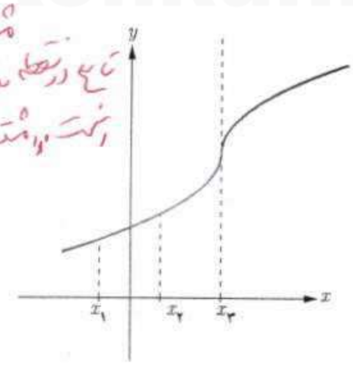
تابع در نقطه x_2 مشتق پذیر نیست زیرا $f'_+(x_2) \neq f'_-(x_2)$ نقاط گوشه‌ای



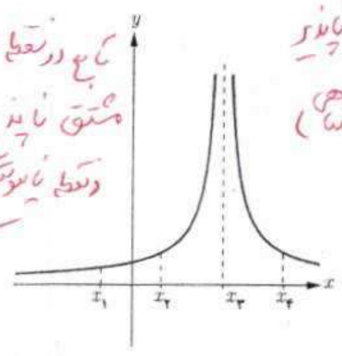
تابع در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)



تابع در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)



تابع در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است. «نقطه ناپیوستگی»

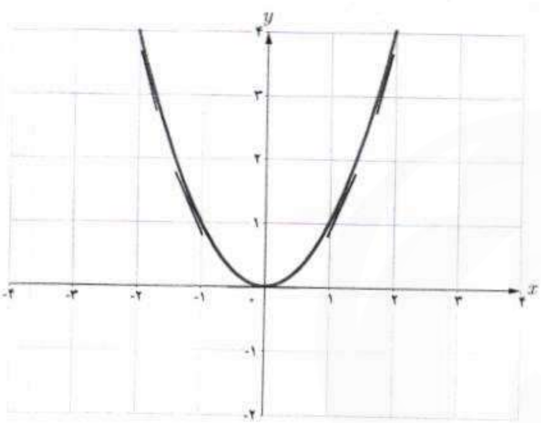


۱ـ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x)=x^2$ را درنظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

$$f'(\sqrt{3})=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^2$ وجود دارد؟ در تمام نقاط

www.konkur.in

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^2$ ، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

بنابراین $f'(x)=2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

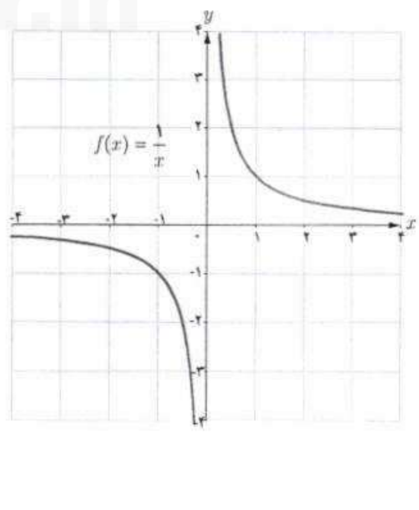
$$f'(-\frac{1}{5})=-\frac{2}{5}\ ,\ f'(\sqrt{7})=2\sqrt{7}\quad \text{و}\quad f'(50)=100$$

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به‌دست آورید : با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل : $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اگر $x\neq 0$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(۳)=\frac{-۱}{۹}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر $(x\neq ۰)$ را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{۵})=\frac{-۱}{۵}$ و $f'(-۲)=-\frac{۱}{۴}$ ، $f'(۳)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۳-x}{۳x}}{\frac{x-۳}{۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}}{۳x\cancel{(x-۳)}}=-\frac{۱}{۹}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

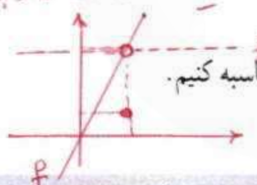
کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases}۵x & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ دامنهٔ f و دامنهٔ f' را محاسبه کنید و ضابطهٔ f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 1\}\cup\{1\}=\mathbb{R}$

$D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیست. لذا $f'(1)$ وجود ندارد

$f'(x)=\begin{cases}۵ & x\neq 1\\ \text{تعریف نشده} & x=1\end{cases}$



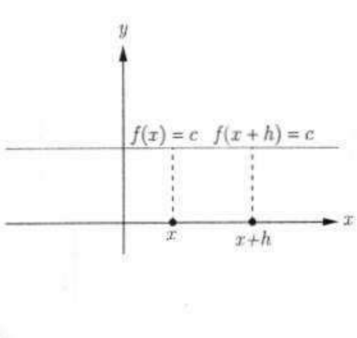
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

به‌طور مثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.



www.konkur.in

۲ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$، آن‌گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$، به‌کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x) = 3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2\right] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1}$$

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x) = x^n$ آن‌گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

***۴** اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

www.konkur.in

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، fg و $\dfrac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\dfrac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

❖ **مثال** : مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\dfrac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

www.konkur.in

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵)$ پ) $h(x)=\dfrac{x}{۲x^۲+x-۱}$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-4)^2}$ $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5)+\sqrt{x}(6x)$ $h'(x)=\dfrac{1(2x^2+x-1)-(4x+1)x}{(2x^2+x-1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)=۵$ ، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

$(f.g)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=5\times 8+(-6)\times 3=22$

$(\frac{f}{g})'(2)=\dfrac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{5\times 8-(-6)\times 3}{(8)^2}=\dfrac{29}{32}$

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم : $f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$

✤ اثبات : با استفاده از تعریف مشتق داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)+\cos x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(\sin x\frac{\cos h-۱}{h})+\lim_{h\to ۰}(\cos x\frac{\sin h}{h}) = 0+\cos x=\cos x$$

در حسابان (۱) دیدیم که : $\lim_{h\to ۰}\dfrac{\cos h-۱}{h}=۰\ ,\ \lim_{h\to ۰}\dfrac{\sin h}{h}=۱$

بنابراین : $f'(x)=(\sin x)(۰)+(\cos x)(۱)$ و در نتیجه $f'(x)=\cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x)=\cos x$ داریم :

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)-\sin x\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{(\cos h-۱)}{h}-\lim_{h\to ۰}\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$
$$=(\cos x)(۰)-(\sin x)(۱)=-\sin x\ \Rightarrow\ g'(x)=-\sin x$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

با استفاده از دو دستور فوق می‌توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به‌دست آورد.

www.konkur.in

❖ **مثال** : مشتق $f(x)=\tan x$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)+(\sin x)(\sin x)}{\cos^{۲} x}=\frac{۱}{\cos^{۲} x}=۱+\tan^{۲} x$$

کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin x\tan x$ ب) $g(x)=\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$

$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x(1+\tan^2 x)$ $g'(x)=\frac{-5\sin x(1-\sin x)-(-\cos x)(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

❖ **مثال** : اگر $h(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$، مطلوب است $h'(x)$.

❖ **حل** : اگر $f(x)=x^{۷}$ و $g(x)=x^{۲}+۳x+۱$. آن‌گاه : $h(x)=f(g(x))$

$$h'(x)=g'(x)f'(g(x))=(۲x+۳)\,f'(g(x))$$

اگر $u=g(x)$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)=u^{۷}\Rightarrow f'(u)=۷u^{۶}=۷(g(x))^{۶}=۷(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$$

بنابراین :

$$h'(x)=(۲x+۳)(۷)(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد،

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

❖ **مثال** : مشتق تابع $y=\sin^{۲}x$ را به‌دست آورید.

❖ **حل** : با فرض $u=\sin x$ داریم : $y=u^{۲}$ و از آنجا :

$$y'=u'\,.\,۲u=(\cos x)(۲)(\sin x)=۲\sin x\cos x$$

سایت کنکور
Konkur.in

کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

$f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + (x^2+1)^3(5)$

ب) $g(x) = \cos^3 x$

$g'(x) = -3\sin x \cos^2 x$

پ) $h(x) = \sin(3x^2 + 5)$

$h'(x) = 6x \cos(3x^2+5)$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

تابع f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a , b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

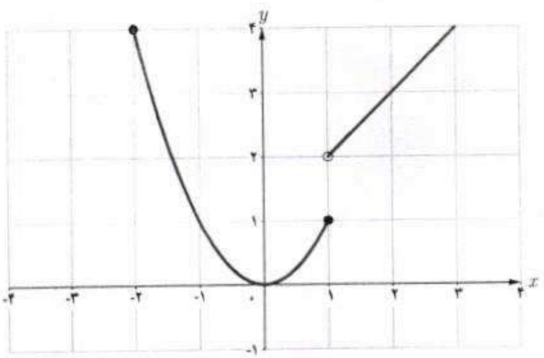
کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a , b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه‌ی (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی a مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a , b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه‌ی (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty , +\infty)$ مشتق‌پذیر است.



✤ **مثال** : تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2 , 1]$ و $(1 , \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[1 , 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه‌ی $(1 , 2)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد، لذا $x=1$ مشتق راست ندارد.

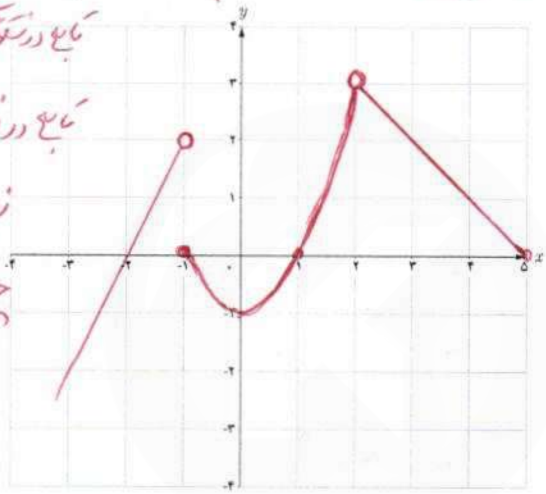
www.konkur.in

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-۱ , ۱]$، $(۲ , ۵)$ و $[-۲ , ۰]$ بررسی کنید.

$f'_+(-۱) = -۲$ و $f'_-(۱) = ۲$

تابع در نقطه [-۱,۱] مشتق پذیر است.
تابع در نقطه (۲,۵) مشتق پذیر است.
تابع در فاصله [-۲,۰] مشتق پذیر نیست
زیرا تابع در فاصله [-۲,۰] پیوسته نیست.
چون تابع در x=-۱ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.



تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱$ آن‌گاه:

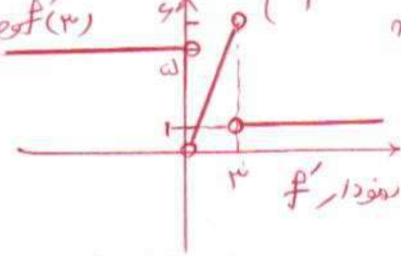
$y' = ۱۲x^۳ + ۴x \quad , \quad y'' = ۳۶x^۲ + ۴$

www.konkur.in

(ب) $f'(0)$ وجود ندارد چون تابع در $x=0$ ناپیوسته است.

$f'_+(3)=1$, $f'_-(3)=6 \to$ $f'(3)$ وجود ندارد.

$$f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

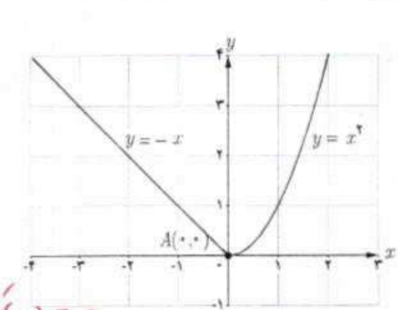


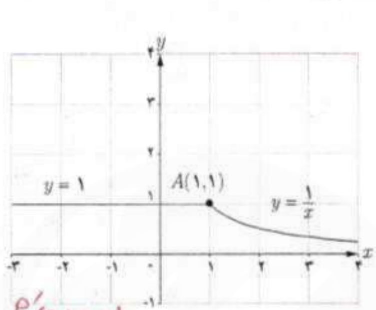
تمرین

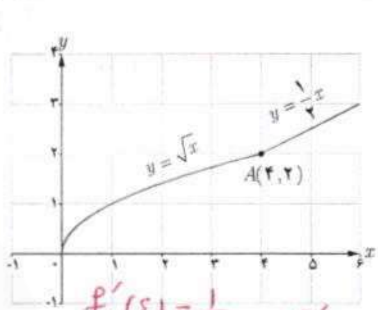
۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

$f(x)=|x-2|$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ x+2 & x\geq 2 \end{cases}$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.





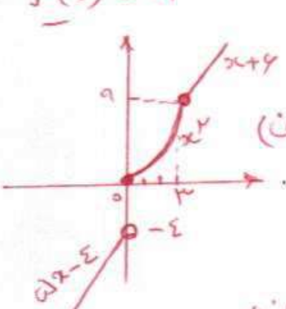


(الف) $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=-1 \to f'(0)$ وجود ندارد.

(ب) $f'_+(1)=-1$, $f'_-(1)=0 \to f'(1)$ وجود ندارد.

(پ) $f'_+(4)=\frac{1}{4}$, $f'_-(4)=\frac{1}{4} \to f'(4)$ وجود ندارد.

۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x\leq 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.



الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند. ← بالا

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. ← بالا

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

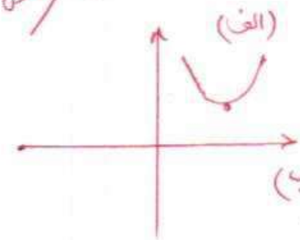
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

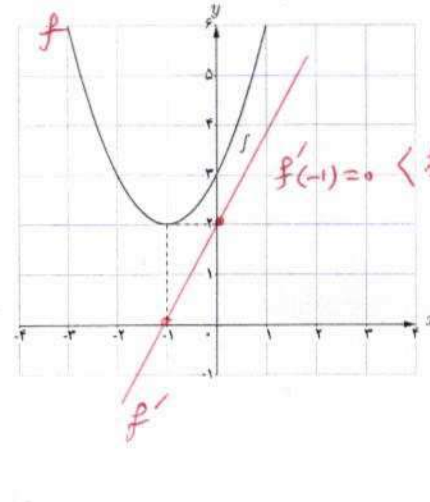
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.



۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

$f'(-1)=0 < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^2+2x+3$ بررسی کنید.

$f'(x)=2x+2$

$f'(2)=6$

$f'(-1)=0$, $f'(0)=2$, $f'(3)=8$

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

www.konkur.in

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=4 \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\ge 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است. پس در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$f(x)=3x \quad ، \quad g(x)=3x+1 \quad ، \quad h(x)=3x-4$

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

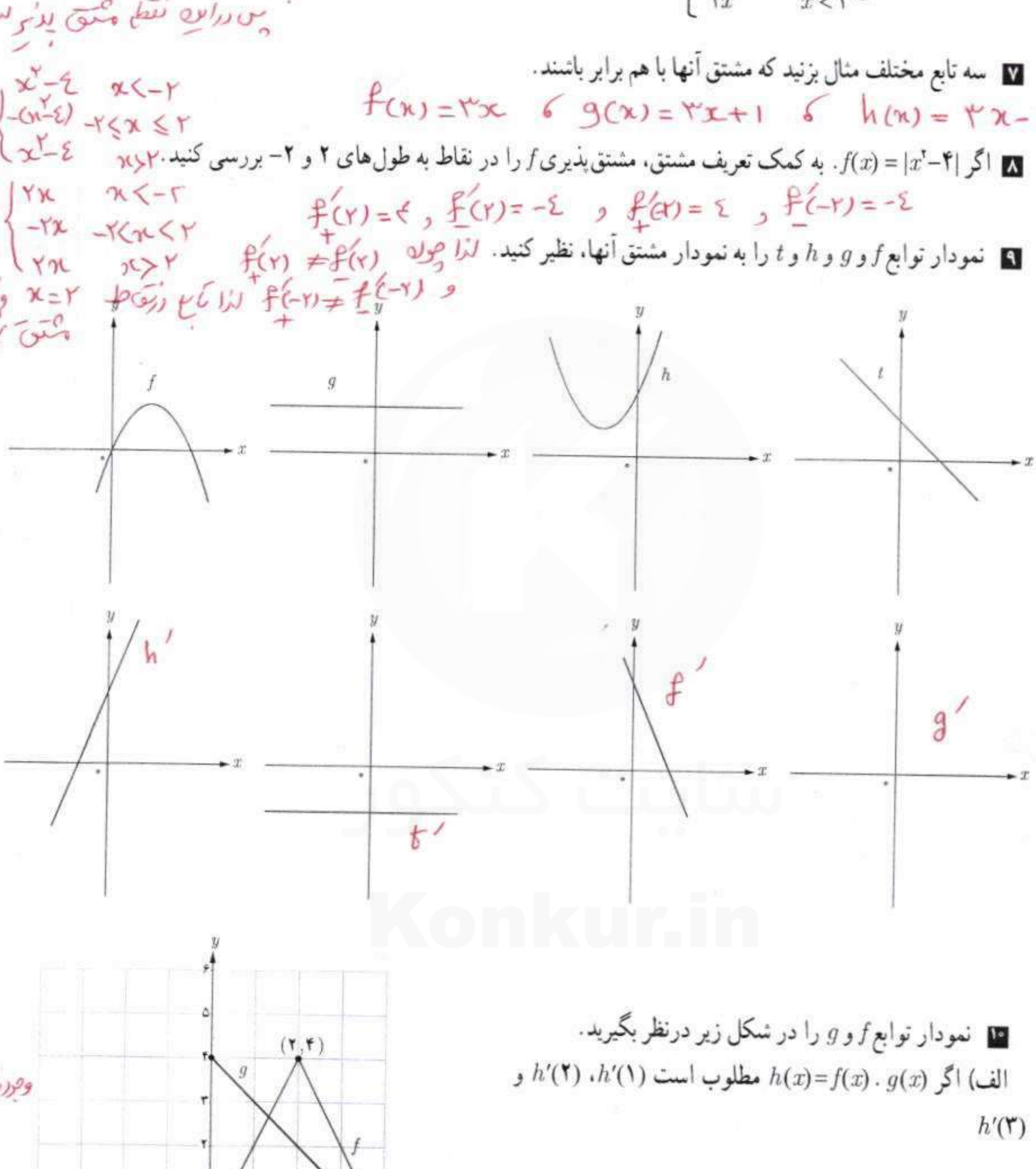
$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<-2 \\ -(x^2-4) & -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & x>2 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-2 \\ -2x & -2<x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$

$f'_+(2)=4 \ , \ f'_-(2)=-4$ و $f'_+(-2)=4 \ , \ f'_-(-2)=-4$

لذا چون $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ و $f'_+(-2)\neq f'_-(-2)$ لذا تابع در نقاط $x=-2 , x=2$ مشتق پذیر نیست.

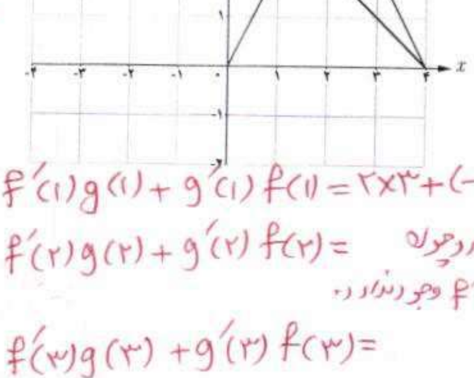
۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$



$f'(1)=2$

$g'(1)=-1$

$f'(2)=$ وجود ندارد

$g'(2)=1$

$f'(3)=-2$

$g'(3)=-1$

$h'(1)=f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=2\times3+(-1)\times2=4$

$h'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=$ وجود ندارد چون $f'(2)$ وجود ندارد.

$h'(3)=f'(3)g(3)+g'(3)f(3)=$

$k'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\times3-(-1)2}{(3)^2}=\frac{8}{9}$

$k'(2)=$ وجود ندارد چون $f'(2)$ وجود ندارد.

$k'(3)=\frac{f'(3)g(3)-g'(3)f(3)}{(g(3))^2}=\frac{-2\times1-(-1)\times2}{(1)^2}$

www.konkur.in

۱۱ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$ مطلوب است.

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3+5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3\times 3 + 2\times 5 = 19$$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = 0 \end{aligned}\right\} \to f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0) =$$ وجود ندارد

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2-4)(2x-5)^3$

$$f'(x) = 6x(2x-5)^3 + 3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1) + 3x^2\sqrt{3x+2}$$

ب) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

ت) $f(x) = \dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$

$$f'(x) = 3\cos x \sin^2 x - 2\sin x \cos x$$

پ) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x - 2\cos x$

? $\tan^2 x$

$$f'(x) = 2(1+\tan^2 x)\tan x + 2\sin x$$

ب) $f(x) \quad \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$?

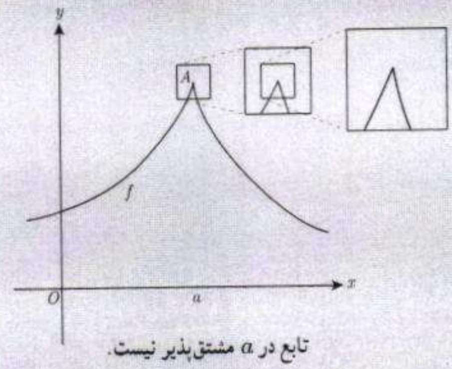
$$f'(x) = \frac{3\cos 3x \sin 2x - 2\cos 2x \sin 3x}{\sin^2 2x}$$

ت) $f(x) = \sin x \cos 2x$

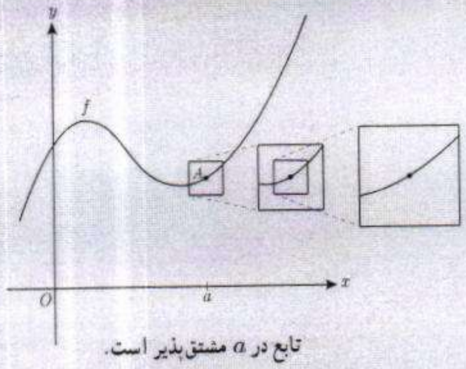
$$f'(x) = \cos x \cos 2x - 2\sin 2x \sin x$$

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a\,,\,f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر نیست.



تابع در a مشتق‌پذیر است.

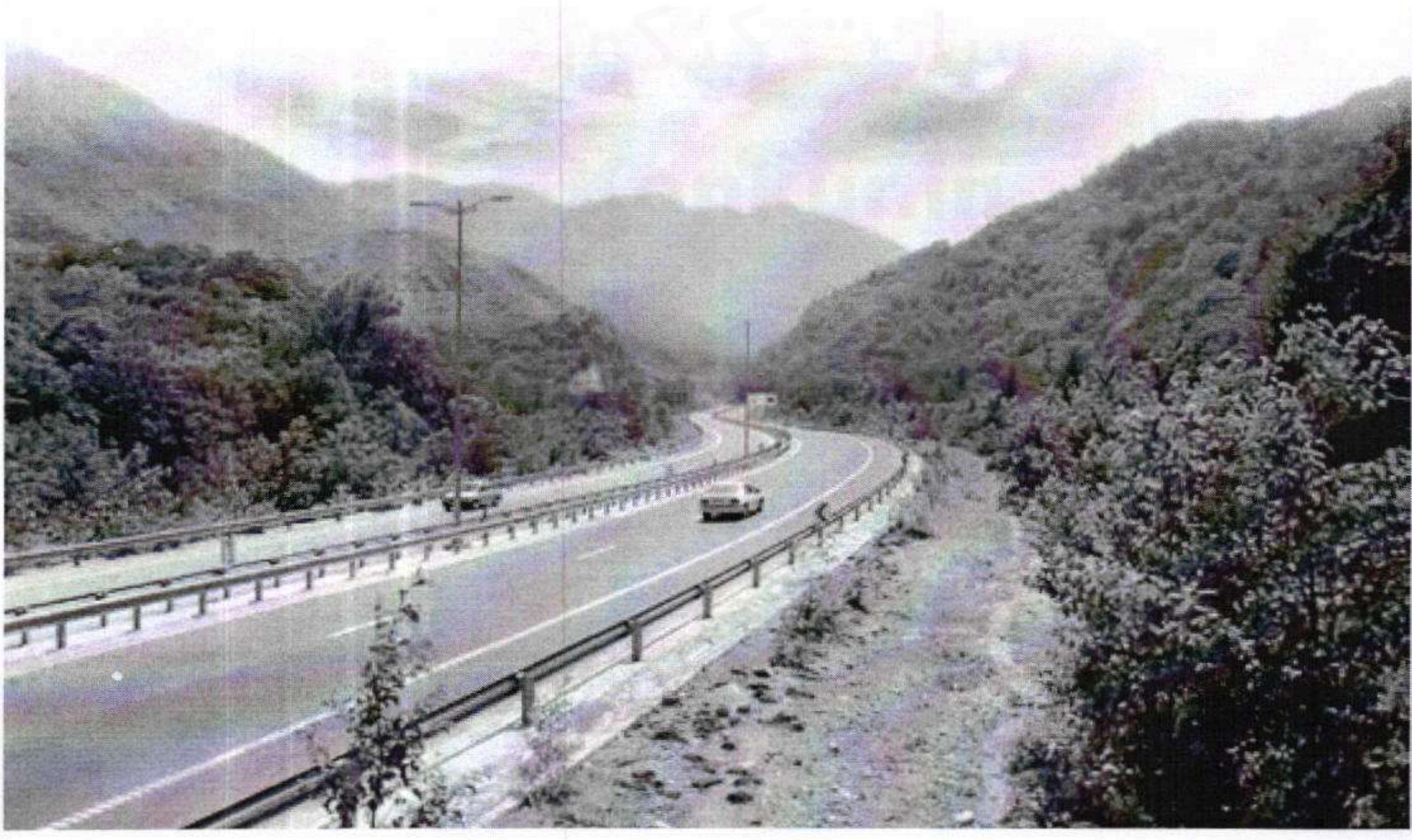
www.konkur.in

درس ۳

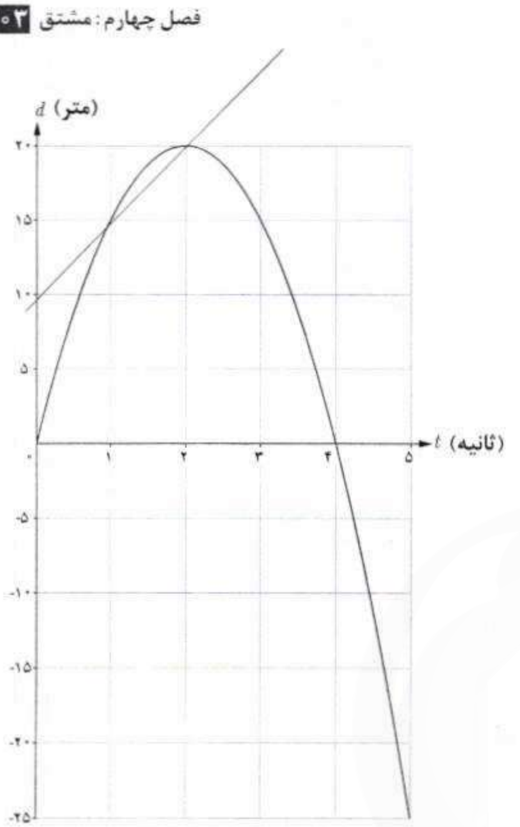
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $۷۰ = \frac{۲۸۰}{۴}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



www.konkur.in



✤ **مثال :** خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t)=-۵t^{۲}+۲۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰\leq t \leq ۵$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان ــ زمان (شکل) :

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=۱$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=۲$ و $t=۳$ چقدر است؟

✤ **حل :**

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۲] = \frac{d(۲)-d(۱)}{۲-۱}=\frac{۲۰-۱۵}{۱}=۵\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۱/۵] = \frac{d(۱/۵)-d(۱)}{۱/۵-۱}=\frac{۱۸/۷۵-۱۵}{۰/۵}=\frac{۳/۷۵}{۰/۵}=۷/۵\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [۱,۱/۴] = \frac{d(۱/۴)-d(۱)}{۱/۴-۱}=\frac{۱۸/۲-۱۵}{۰/۴}=\frac{۳/۲}{۰/۴}=۸\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=۱$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-۱۰t+۲۰$ ، پس $d'(۱)=۱۰$

ت) $d'(۳)=-۱۰ \quad , \quad d'(۲)=۰$

www.konkur.in

سرعت در لحظه $t=۲$، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(۳)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=۳$ برخلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

به‌جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\,,\,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ = آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a\,,\,a+h]$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

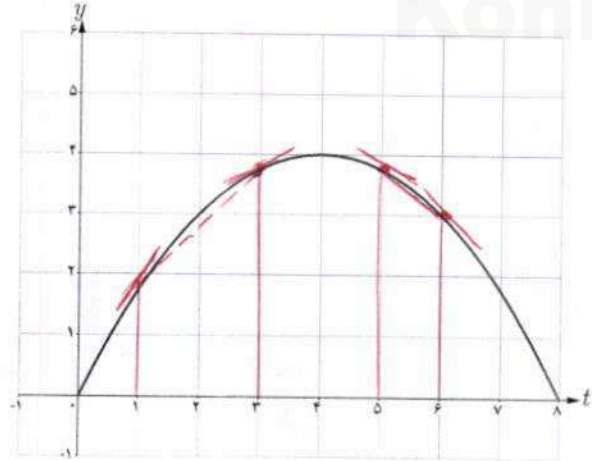
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$ = آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظراند.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:
(محاسبهٔ عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

F<B<E<D<A<C

سایت کنکور
Konkur.in

www.konkur.in

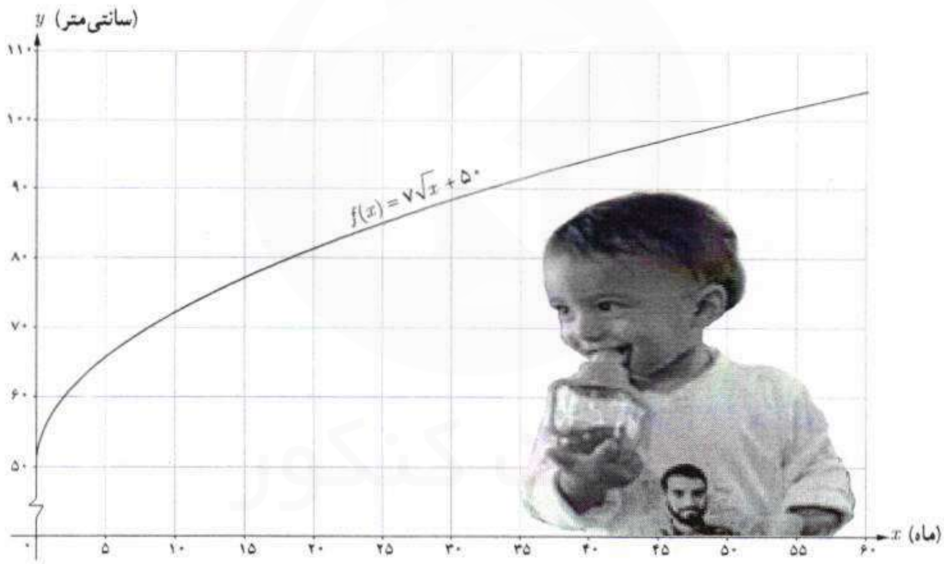
کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,60]$ چنین است :

$$\frac{f(60)-f(0)}{60-0} = \frac{7\sqrt{60}+50-50}{60} \approx 0/9 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

$\frac{f(25)-f(0)}{25-0} = \frac{7\sqrt{25}+50-50}{25} = \frac{7}{5} = 1/4 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}$

$f'(25) = \frac{7}{2\sqrt{25}} = \frac{7}{10} = 0/7 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$ $\quad f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{7}{14} = 0/5 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$ $\quad f'(25) > f'(49)$

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

آهنگ متوسط $= \frac{f(36)-f(16)}{36-16} = \frac{95-80}{20} = \frac{3}{4} = 0/75 \ \frac{\text{سانتی}}{\text{ماه}}$

www.konkur.in

نرخ باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹ , ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با :

$$\frac{1/6-7}{1389-1339}=\frac{-5/4}{50}=-0/108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹ , ۱۳۶۴] را به‌دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379)-f(1364)}{1379-1364}=\frac{2/2-6/2}{15}=\frac{-4}{15}=-0/27$$

میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

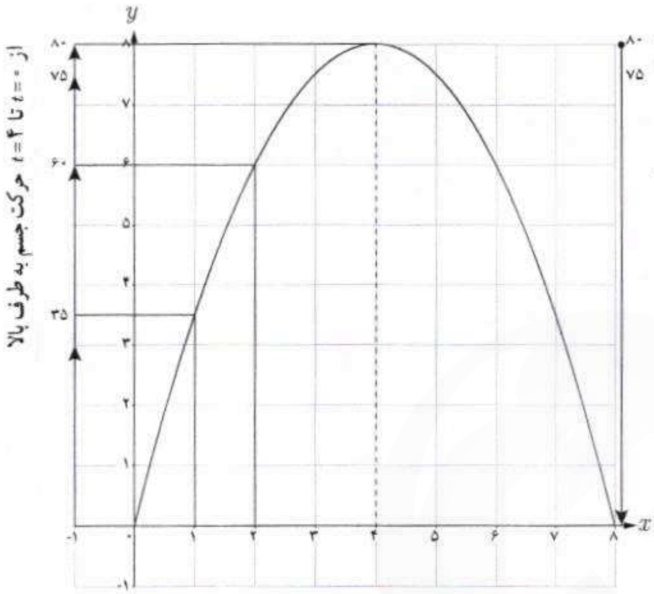
نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

www.konkur.in

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

❖ **مثال :** جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ـ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0,2]$, $[1,2]$, $[2,3]$ و $[3,4]$ را به ترتیب با v_1 , v_2 , v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم :

$$v_1 = \frac{h(2)-h(0)}{2-0} = \frac{60}{2} = 30\,\text{m/s} \qquad v_2 = \frac{h(2)-h(1)}{2-1} = 25\,\text{m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3)-h(2)}{3-2} = \frac{75-60}{1} = 15\,\text{m/s} \qquad v_4 = \frac{h(4)-h(3)}{4-3} = \frac{80-75}{1} = 5\,\text{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Longrightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30\,\text{m/s} \quad , \quad h'(2) = 20\,\text{m/s} \quad , \quad h'(3) = 10\,\text{m/s} \quad , \quad h'(4) = 0\,\text{m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4,5]$ برابر $\frac{h(5)-h(4)}{5-4} = \frac{75-80}{1} = -5\,\text{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10\,\text{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

www.konkur.in

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

هنگام پرتاب $t=0 \Rightarrow h'(0)=40\ m/s$

هنگام برخورد به زمین $t=8 \Rightarrow h'(8)=-40\ m/s$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی [۵, ۸] به‌دست آورید.

سرعت متوسط $= \frac{h(8)-h(5)}{8-5} = \frac{0-75}{3} = -25\ m/s$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵ m/s- است.

سرعت لحظه‌ای $= h'(t) = -10t+40$

سرعت ۳۵: $35=-10t+40 \rightarrow t=0/5\ s$

سرعت ۳۵-: $-35=-10t+40 \rightarrow t=7/5\ s$

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

الف) $\frac{T(12)-T(8)}{12-8} = \frac{19-11}{4} = 2$ ب) $\frac{T(18)-T(12)}{18-12} = \frac{9-19}{6} = -\frac{5}{3}$

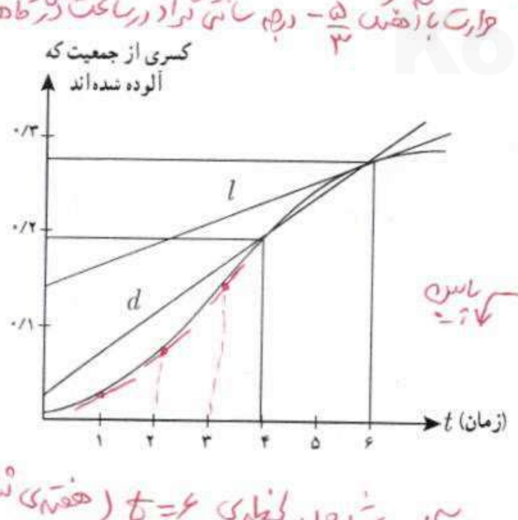
آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

پ) در بازه‌ی زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ ظهر، درجه حرارت با آهنگ ۲ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال افزایش است. امّا در بازه‌ی زمانی ساعت ۱۲ ظهر تا ساعت ۱۸ درجه حرارت با آهنگ $\frac{5}{3}$- درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال کاهش است.



۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

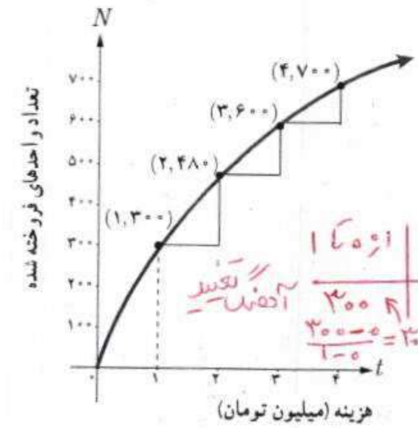
الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند. پاسخ زیر

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

الف) شیب خط l ، آهنگ تغییر لحظه‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه‌ی $t=6$ (هفته‌ی ششم) نشان می‌دهد. شیب خط d ، آهنگ تغییر متوسط ، کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله‌ی زمانی $t=4$ تا $t=6$ (هفته‌ی چهارم تا هفته‌ی ششم) نشان می‌دهد.

www.konkur.in



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

از ۳ تا ۴	از ۲ تا ۳	از ۱ تا ۲	از ۰ تا ۱
۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۳۰۰

آهنگ تغییر

$\frac{300-0}{1-0}=300$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟ زیرا با افزایش هزینه، تعداد کالاهای فروخته‌شده کم می‌شود و رشد کمتری دارد. خریداران کم می‌شوند.

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $= \frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4$ سرعت لحظه‌ای $=2t-1$ $\quad 2t-1=4 \rightarrow t=2.5\,s$

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

$\frac{f(0.4)-f(0.3)}{0.1}=12\,m/s$

$\frac{f(0.5)-f(0.4)}{0.1}=11\,m/s \qquad f'(0.4)=11.5\,m/s$

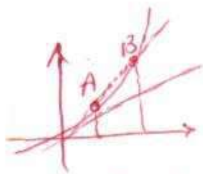
بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s ب) ۱۴/۹۱m/s ج) ۱۱/۵m/s ✓ د) ۱۶/۰۳m/s

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(0)\approx -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	۶-	۳-	۱/۸-	۰/۴-	×

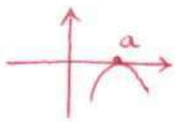
www.konkur.in



۷ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. نادرست

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست



پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$ نادرست

$y=(x-1)^2$ مثلاً

$a=1$

$f(a)=f'(a)=0$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

$\frac{m(4)-m(3)}{4-3}=\frac{130-\sqrt{3}-54}{1}\simeq 74{,}3\ g$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \to m'(3)\cong 54{,}3\ g$

۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

الف) $\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=39{,}204-40=-0{,}796$ لیتر

ب) $\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=-0{,}4$ آهنگ متوسط

آهنگ لحظه‌ای $V'(t)=-0{,}8(1-\frac{t}{100})$

$\to -0{,}8(1-\frac{t}{100})=-0{,}4$

$\to 1-\frac{t}{100}=\frac{1}{2} \to t=50\ s$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان